

## INTEGRACIÓN POR CAMBIO (SUSTITUCIÓN) DE VARIABLES

Mauro Cabrera – 2011

### FUNDAMENTOS:

Sea una función  $u$  tal que  $u = u(x)$  y  $f$  una función compuesta, tal que  $f = f(u)$ , entonces, para resolver integrales del tipo:

$$\int f'(u) \cdot u' dx$$

se puede intentar el siguiente cambio de variables:

$$t = u$$
$$dt = u' dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{u'}$$

Reemplazando en la integral inicial queda:

$$\int f'(u) \cdot u' dx = \int f'(t) \cdot u' \frac{dt}{u'} = \int f'(t) \cdot dt$$

Integral que se supone es más “fácil” de integrar que la original (lo que no siempre sucede, debiendo recurrir a todo el arsenal disponible de técnicas para integrar, incluyendo en ocasiones, una segunda sustitución de variables ...).

Una vez obtenida la primitiva en función de  $t$ , se hace el camino inverso, reemplazando  $t$  por  $u$ .

Ejemplo: Sea  $I = \int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$  de la simple inspección se puede deducir que

$$u' = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow u = 2\sqrt{x} \text{ y que } f'(u) = \text{sen}\left(\frac{u}{2}\right)$$

Aplicando el método sugerido:  $t = u = 2\sqrt{x} \Rightarrow dt = u' dx \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = \sqrt{x} dt$

$$I = \int f'(u) \cdot u' dx = \int \text{sen}\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{x} dt =$$

$$= \int \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt = -2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

$$I = -2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + C = -2 \cos\left(\frac{u}{2}\right) + C = -2 \cos\left(\frac{2\sqrt{x}}{2}\right) + C$$

$$I = \int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = -2 \cos(\sqrt{x}) + C$$

## SUSTITUCIONES USUALES

No siempre es sencillo poder identificar con claridad la función  $u(x)$  o la  $f'(u)$ , por ello como ayuda, se sugiere intentar con los siguientes cambios de variable al integrar funciones  $R$  de tipo racional, lo que como se aprecia, no implica que sus argumentos sean racionales, ni mecho menos, que una vez hecha la sustitución, la integración resultante sea fácil:

INTEGRAL	CAMBIO SUGERIDO	EJEMPLO
$\int R\left(x, \left(\sqrt[n_i]{ax+b}\right)_{i=1,\dots,m}\right)dx$	$x = t^{M.C.M. \text{ índices}}$ M.C.M.= Mínimo Común Múltiplo de los índices (a, b constantes)	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+2}\sqrt[5]{3x+7}}dx$
$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$	$x = a \cdot \text{sen}(t)$ a constante	$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$	$x = a \cdot \text{tan}(t)$ a constante	$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$	$x = \frac{a}{\cos(t)} = a \cdot \text{sec}(t)$ a constante	$\int \frac{12}{x\sqrt{x^2-4}}dx$
$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$	Se busca un cuadrado perfecto y se transforma en uno de los casos anteriores. a, b, c son constantes	$\int \frac{3x}{\sqrt{3x^2+2x+1}}dx$
$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$	$t = \frac{ax+b}{cx+d}$ a, b, c, d constantes	$\int \sqrt{\frac{3x+2}{4x+7}}dx$
$\int R(\text{sen}x, \cos x)dx$	$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ $\Rightarrow \text{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}; \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	$\int \frac{4}{5\text{sen}(x)+6\cos(x)}dx$
$\int R(-\text{sen}x, -\cos x)dx$	$t = \tan(x)$ $\Rightarrow \text{sen}^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$	$\int \frac{1}{8\text{sen}^2(x)+3\cos^2(x)}dx$
$-\int R(-\text{sen}x, \cos x)dx$	$t = \cos(x)$	$\int \text{sen}^3(x)dx$
$-\int R(\text{sen}x, -\cos x)dx$	$t = \text{sen}(x)$	$\int \frac{\cos^5(x)+\cos^7(x)}{\text{sen}^2(x)+\text{sen}^6(x)}dx$

No está de más insistir en que el hacer una sustitución de variable, es sólo el primer paso para resolver una integral y es más que seguro que habrá que recurrir además a otras técnicas de integración y a todo el bagaje de identidades algebraicas y trigonométricas conocidas.

**De la abundante BIBLIOGRAFIA, para profundizar, se recomienda consultar:**

<http://ocw.mit.edu/resources/res-18-001-calculus-online-textbook-spring-2005/textbook/>

IRRESISTIBLE INTEGRALS. George Boros, Victor H. Moll – CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS I. Ana María Hernández y otros. SANZ Y TORRES